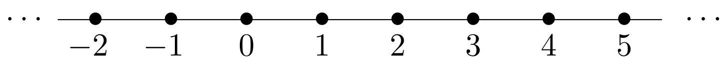
Zur Notwendigkeit von Unschärferelationen

Johannes Barton, Wien 2013

Alle klassischen Unschärferelationen setzen räumliche oder zeitliche Ausdehnung mit der Genauigkeit einer möglichen Periodizität in Beziehung. Umso kleiner diese räumlichen oder zeitlichen Intervalle sind, desto ungenauer ist Periodizität definiert, da exakte Periodizität ein unendlich großes Intervall voraussetzt. So sind, wie man aus der Schule weiß, die ganzen Zahlen exakt periodisch auf der unendlich langen reellen Zahlengeraden angeordnet.



Fragen wir nun nach der Anzahl von ganzen Zahlen, die sich in einem Intervall mit der Länge 3.5 befinden, dann gibt es zwei mögliche Antworten:

1) Wir lassen das Intervall beispielsweise bei 0.2 beginnen, sodass es bei 3.7 endet. In diesem Intervall befinden sich die *drei* ganzen Zahlen 1, 2, 3.
2) Wir lassen das Intervall beispielsweise bei 0.8 beginnen, sodass es bei 4.3 endet. In diesem Intervall befinden sich die *vier* ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4.

Hier sehen wir, dass das Abzählen von Punktereignissen in einem kontinuierlichen Intervall der prinzipiellen Unschärfe $\Delta N = 1$ unterliegt. Definieren wir nun die Frequenz f als Anzahl N pro Intervalllänge Δt, dann erhalten wir:

$$f_1 = \frac{N}{\Delta t} \quad \text{und} \quad f_2 = \frac{N+1}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{1}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad \Delta f \cdot \Delta t = 1$$

Deuten wir Δt als Messzeit und Δf als prinzipielle Frequenzunschärfe, dann hätten wir mit $\Delta f \cdot \Delta t = 1$ eine Unschärferelation vorliegen, welcher beispielsweise in der Nachrichtentechnik eine fundamentale Rolle zukommt.

Eine kleine Schwäche haben diese Überlegungen jedoch, da nur Punktereignisse abgezählt werden. Jeder Schüler wird einwenden, dass die Frequenz als Anzahl der Schwingungen pro Zeitintervall definiert ist, und bei einer Schwingung nicht von einem Punktereignis gesprochen werden kann. Was ist aber eine Schwingung? Betrachten wir dazu folgende Zeichnung:

$$| \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad |$$

Sehen wir darin acht äquidistante Striche oder sieben gleiche Abstände? Interpretieren wir die Abstände oder die Striche als Schwingungen?

Es ist einerlei, da weder die Abstände ohne Striche noch die Striche ohne Abstände zu denken sind.

Wiederum erkennen wir die prinzipielle Unschärfe $\Delta N = 1$ beim Abzählen in einem vorgegebenen Intervall.

Diese erkenntnistheoretischen Überlegungen zeigen auch, dass der Begriff Frequenz unscharf definiert ist, sodass Δf nicht eine Ungenauigkeit der Messung beschreibt, sondern prinzipieller Natur ist. Daher ist der Begriff Unschärferelation recht treffend gewählt.

Gehen wir von der obigen regelmäßigen Abfolge von Strichen zu einer unregelmäßigen, zum Beispiel

$$| \quad | \qquad | \qquad | \quad | \quad | \qquad | \quad |$$

über, dann erkennen wir auch, dass die üblichen Unschärferelationen als Ungleichungen der Form $\Delta f \cdot \Delta t \geq 1$ angegeben werden.