Über die Zufriedenheit in der Spieltheorie

Johannes Barton, Wien 2009

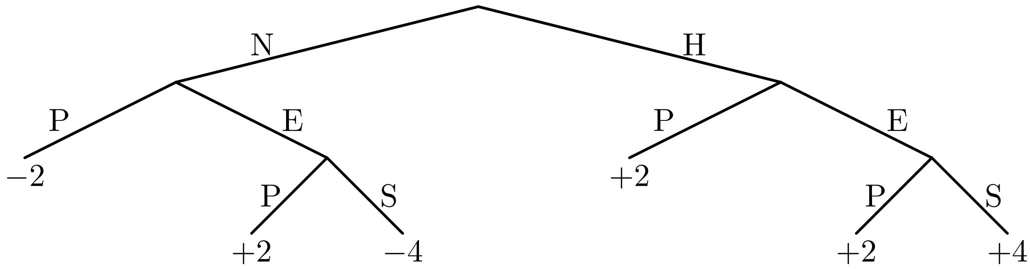
Praktisch in jeder Situation, in der wir als soziale Individuen handeln, hängt unser *Nutzen* nicht nur von unseren Entscheidungen sondern auch vom Verhalten der anderen ab. Da solche Situationen nicht unähnlich zu einer Vielzahl an Gesellschaftsspielen sind, greift die Spieltheorie diese Analogien in ihrer Begriffbildung auf und versucht mathematische Modelle zu entwickeln, um solche Situationen bewerten und die Verhaltensweisen interpretieren zu können.

Ein "Spiel", welches nicht nur den Nutzen sondern auch die *Zufriedenheit* berücksichtigt wäre beispielsweise die sogenannte "Kuchen–Regel". Diese besagt, dass ein Kuchen gerecht unter zwei Kindern aufgeteilt werden kann, indem das eine Kind den Kuchen teilen, und das andere sich ein Stück aussuchen darf. Diese Regel funktioniert in der Praxis nur deshalb so gut, weil beide Kinder mit dem Resultat *zufrieden* sein können. Sind darüber hinaus beide Kinder daran interessiert, ein möglichst großes Stück zu ergattern, dann wird dem ersten Kind nichts anderes übrig bleiben, als den Kuchen genau zu halbieren. Diese Regel setzt also ein rationales Verhalten im Sinne der Nutzen– bzw. Gewinnmaximierung voraus. Dass ein solches rationales Verhalten auch bei Erwachsenen nicht immer gegeben ist, zeigen Untersuchungen am sogenannten Ultimatumspiel. Bei diesem Spiel wird zwei Spielern gemeinsam eine bestimmte Geldsumme angeboten. Der erste Spieler darf nun bestimmen, wie viel er davon bekommen soll. Der zweite Spieler kann sich mit dem Rest begnügen oder ablehnen. Bei einer Ablehnung wird an keinen der beiden ausgezahlt.
Da der zweite Spieler nur gewinnen kann, wenn er nicht ablehnt, sollte er jedes Angebot, und sei es noch so klein, annehmen. Damit könnte er seinen Gewinn maximieren, zufrieden wird er aber nicht sein. Ab einem gewissen Maß an Ungerechtigkeit wird wohl für jeden Menschen eine Grenze überschritten, sodass er auf seinen Gewinn verzichten und daher das Angebot ablehnen wird. Auch der erste Spieler wird mit keiner, von ihm getätigten Aufteilung zufrieden sein.
Ein, aus unserer Sicht, sonderbares Verhalten eines Akteurs kann sich durchaus als rational herausstellen, wenn sein möglicher Nutzen ein anderer ist, als wir angenommen haben. In diesem Aufsatz werden wir also unser Augenmerk auf die Analyse von Spielsituationen richten, bei denen nur von einem Spieler der mögliche Nutzen bekannt ist.

Um die grundlegenden Begriffe der Spieltheorie zu erarbeiten, beginnen wir mit einem ganz einfachen, dem Pokern ähnlichen Spiel, welches noch die wesentlichen Merkmale wie Erhöhen, Passen, Bluffen beinhaltet:

– Jeder der beiden Spieler macht einen Einsatz von 2 Einheiten. Danach zieht der erste Spieler mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder eine niedrige oder eine hohe Karte.
– Der erste Spieler kann passen oder seinen Einsatz von 2 auf 4 Einheiten erhöhen. Wenn er passt, erhält bei einer niedrigen Karte der zweite Spieler die getätigten Einsätze. Bei einer hohen Karte bekommt der erste Spieler beide Einsätze.
– Hat der erste Spieler erhöht, dann kann der zweite Spieler entscheiden, ob er passen oder zum "Sehen" seinen Einsatz auf 4 Einheiten erhöhen will. Wenn der zweite Spieler nun passt, dann erhält der erste Spieler alle getätigten Einsätze. Hat er sich für das "Sehen" entschieden, dann bekommt er bei einer niedrigen Karte alle Einsätze, bei einer hohen Karte gewinnt dagegen der erste Spieler die getätigten Einsätze.

Aus diesen Spielregeln wird zuerst einmal ersichtlich, dass zwei Spieler gegeneinander antreten, wobei der Gewinn des einen stets dem Verlust des anderen entspricht. Wir sprechen von einem **Zwei–Personen–Nullsummen–Spiel**. Weiter erkennen wir, dass der zweite Spieler, im Gegensatz zum ersten, die gezogene Karte nicht kennt. Dafür kennt der erste Spieler bei seiner Entscheidungsfindung noch nicht die Ansage des zweiten Spielers. Es handelt sich also um ein Spiel **ohne perfekte Information**.
Wir werden nun den Spielverlauf, den Spielregeln entsprechend, in einem Baumdiagramm darstellen. So eine chronologische Zusammenstellung wird gerne **extensive Form** des Spiels genannt.



In der ersten Ebene kommt das zufällige Ziehen einer niedrigen (N) oder hohen (H) Karte zum Ausdruck. Die nachfolgenden Verzweigungen gehen auf die Ansagen des ersten Spielers, nämlich Passen (P) oder Erhöhen (E) zurück. In der dritten Ebene sind dann die Entscheidungen Passen (P) oder Sehen (S) des zweiten Spielers festgehalten. Endet ein Ast ohne Verzweigung, dann endet auch die konkrete Partie. In solchen Endpunkten ist der Gewinn des ersten Spielers angegeben. Beispielsweise besagt die Zahl -4, dass der erste Spieler 4 Einheiten verliert, welche wegen der Nullsummen–Eigenschaft der zweite Spieler gewinnt. Ein kurzer Blick auf alle möglichen Gewinne zeigt, dass der erste Spieler bei diesem Spiel sicherlich einen Vorteil hat. Nun stellt sich die Frage, ob sich so ein Vorteil auch quantitativ fassen lässt.

Einerseits hängen die Gewinne vom **Zufall** ab, sodass wir nur **Erwartungswerte**, d.h. durchschnittliche Gewinne bei sehr vielen Partien, angeben können. Andererseits können die Gewinne auch durch die jeweils gewählte Strategie beeinflusst werden. Dabei ist eine **Strategie** eine für alle Eventualitäten vorgesehene Handlungsanweisung des betreffenden Spielers.
In unserem Fall hat der zweite Spieler nur die beiden Strategien Passen (P) und Sehen (S). Wogegen der erste Spieler vier Strategien hat, welche sich aus allen Kombinationen aus Passen (P) und Erhöhen (E) bei den beiden möglichen Karten ergeben. Wir werden diese Strategien mit PP, PE, EP und EE bezeichnen, wobei beispielsweise die Strategie EP bedeutet, dass bei einer niedrigen Karte der Einsatz erhöht und bei einer hohen Karte gepasst wird. Stellen wir nun die Gewinnerwartungen des ersten Spielers tabellarisch in einer Matrix dar, dann gelangen wir zu folgender **Normalform** des Spiels:

	Passen	Sehen
PP	$0.5 \cdot (-2+2)$	$0.5 \cdot (-2+2)$
PE	$0.5 \cdot (-2+2)$	$0.5 \cdot (-2+4)$
EP	$0.5 \cdot (+2+2)$	$0.5 \cdot (-4+2)$
EE	$0.5 \cdot (+2+2)$	$0.5 \cdot (-4+4)$

Wie ersichtlich, verwenden wir bei der Berechnung der Gewinnerwartungen die Eigenschaft, dass beide Karten gleich wahrscheinlich sind, sodass wir die betreffenden Wahrscheinlichkeiten jeweils mit 50% bewerten. So erhalten wir:

	P	S
PP	0	0
PE	0	+1
EP	+2	−1
EE	+2	0

In einer derartigen Gewinnmatrix gibt es immer zwei besondere Werte, welche wir nun charakterisieren wollen:

– Der **Maximin–Wert** ist der größte Gewinn, den sich ein Spieler bei geschickter Wahl seiner Strategie auf jeden Fall sichern kann. Der erste Spieler wird dazu seine Strategien, das sind die Zeilen der Matrix, nach den minimalen Einträgen absuchen, und danach das Maximum dieser Minima als seinen Maximin–Wert angeben. In unserem Beispiel würde demnach Maximin = 0 gelten.
– Der **Minimax–Wert** ist der kleinste Gewinn, bei dem ein Spieler mit seiner Strategiewahl noch zufrieden ist. Um diesen Wert für den ersten Spieler zu bestimmen, müssen alle Strategien des Gegners, das sind die Spalten der Matrix, nach ihren maximalen Einträgen abgesucht werden. Das Minimum dieser Maxima wäre dann der Minimax–Wert. In unserem Beispiel würde demnach Minimax = 1 gelten.

An dieser Stelle wollen wir betonen, dass diese Werte ohne Kenntnis der Gewinnmatrix des Gegenspielers definiert wurden. Sie machen also auch bei Spielen ohne Nullsummen–Eigenschaft einen Sinn. Speziell der Minimax–Wert wird in der gängigen Literatur nicht über den Begriff der Zufriedenheit definiert.
Nun gilt aber die Ungleichung

$$\text{Maximin} \leq \text{Minimax}$$

für alle Matrizen. Der Beweis dieser Ungleichung könnte folgendermaßen lauten: Stehen die beiden Werte an unterschiedlichen Stellen der Matrix (denn sonst wäre die Gleichheit garantiert), dann gibt es einen Matrixeintrag, welcher sowohl in derselben Zeile wie ein Maximin–Wert, als auch in derselben Spalte wie ein Minimax–Wert steht. Nennen wir diesen Matrixeintrag K, dann müssen gemäß der Definition Maximin $\leq K$ und Minimax $\geq K$ gelten. Daraus folgt aber schon die zu beweisende Ungleichung.

Wenn wir die Strategien des ersten Spielers untereinander vergleichen, dann erkennen wir, dass die Strategie PE auf keinen Fall schlechter ist als die Strategie PP. Das heißt: PP ist eine durch die **dominante** Strategie PE dominierte Strategie. Genauso ist auch EE im Vergleich mit EP dominant. Bei der Suche nach optimalen Strategien für den ersten Spieler können wir demnach die dominierten Strategien in der Gewinnmatrix ruhig außer Acht lassen:

	P	S
PE	0	1
EE	2	0

Natürlich müssen wir davon ausgehen, dass dieses Spiel, wenn es fair sein soll, mit unterschiedlicher Rollenverteilung sehr oft gespielt wird. Wenn der erste Spieler, um seine Gewinnerwartung zu maximieren, immer die Strategie EE wählt, und damit teilweise blufft,

dann wird dies der zweite Spieler schnell durchschauen und seine Strategie S wählen. Damit wären wir beim Maximin–Wert des ersten Spielers angelangt. Wählt der zweite Spieler allerdings immer die Strategie S, dann wird der erste Spieler wiederum dies schnell durchschauen und auf die Strategie PE setzen, um seinen Minimax–Wert zu erreichen.
Die einzige Möglichkeit sich vor den psychologischen Fähigkeiten des Gegners, also vor dem "Durchschautwerden" zu schützen, ist es, die Strategiewahl dem Zufall zu überlassen, denn dieser wird auch von dem besten Psychologen nicht durchschaut. Jetzt stellt sich die Frage, in welchem Verhältnis die Strategien gemischt werden sollten, um ein optimales Resultat zu erzielen.
Bezeichnen wir mit p und $1-p$ die Wahrscheinlichkeiten für die Strategien PE und EE des ersten Spielers, und analog mit q und $1-q$ die Wahrscheinlichkeiten für die Strategien P und S des zweiten Spielers, dann lässt sich die Gewinnerwartung G des ersten Spielers als

$$\begin{aligned} G &= 0 \cdot p \cdot q + 1 \cdot p \cdot (1-q) + 2 \cdot (1-p) \cdot q + 0 \cdot (1-p) \cdot (1-q) \\ &= -3 \cdot p \cdot q + p + 2 \cdot q \end{aligned}$$

anschreiben. Unterliegt der erste Spieler einem Maximin–Denken, dann wird er bestrebt sein, seinen Gewinn unabhängig vom Strategiemix des zweiten Spielers, also unabhängig von q, zu machen. Dies gelingt ihm, wenn

$$2 \cdot q - 3 \cdot p \cdot q = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p = \frac{2}{3}$$

gilt. Andererseits wird der erste Spieler, wenn er einem Minimax–Denken anhängt, mit seinem Strategiemix auch dann zufrieden sein, wenn sein Gewinn unabhängig von p ausfällt, denn in diesem Falle hätte er seine Strategien gar nicht besser mischen können. Dies tritt dann ein, wenn

$$p - 3 \cdot p \cdot q = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q = \frac{1}{3}$$

gilt. Natürlich kann nur der zweite Spieler die Wahrscheinlichkeit q festlegen. Allerdings hat das keine Auswirkungen auf die Zufriedenheit des ersten Spielers, denn in beiden Fällen ist die Gewinnerwartung gleich, nämlich:

$$G_{\text{Maximin}} = G_{\text{Minimax}} = \frac{2}{3}$$

Ganz allgemein hat *John von Neumann* im Jahre 1928 die Gleichheit der beiden Werte bei Verwendung von gemischten Strategien für alle endlichen Matrix–Spiele bewiesen. Wir können nun diesen sogenannten **Minimax–Satz** etwas umformulieren: *Es existiert ein optimaler Strategiemix mit dem man zufrieden sein muss, und dessen Berechnung einzig und allein auf der eigenen Gewinnmatrix beruht.*

Für unser konkretes Spiel können wir also behaupten, dass der erste Spieler mit der Wahrscheinlichkeit von 1/3 die Strategie EE wählen, und daher mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 bluffen sollte. Der Reiz des Spieles geht damit aber nicht verloren, da ein guter Pokerspieler sich für den besseren Psychologen hält, und daher auf das "Denken in gemischten Strategien" verzichten wird.
Nochmals sei betont, dass wir diese Ergebnisse dadurch erzielt haben, dass wir uns in die Lage des ersten Spielers versetzt haben. Auch wenn die Nullsummen–Eigenschaft des Spiels

es gestattet, die möglichen Gewinnerwartungen des zweiten Spielers zu berechnen, über den Nutzen des zweiten Spielers wissen wir herzlich wenig. Muss er defensiv spielen, da er einen weiteren Verlust nicht verkraften kann? Oder, will er in der Hoffnung auf vertauschte Rollen nur beeindrucken? Vielleicht bezieht er seinen Nutzen nur aus dem Spiel an sich und nicht aus einem Gewinn? Ist er gar spielsüchtig? Da wir diese Fragen aus der Sicht des ersten Spielers nicht beantworten können, wäre es vermessen, eine Analyse mit Hilfe des möglichen Nutzens des zweiten Spielers zu wagen.

Meist ist es nicht möglich den optimalen Strategiemix so einfach wie im letzten Beispiel zu bestimmen. Daher wollen wir anhand eines weiteren Beispiels ein allgemeines Verfahren untersuchen: Gegeben sei die Gewinnmatrix

	A	B
p_1	-1	$+1$
p_2	$+2$	-1
p_3	$+1$	0

des ersten Spielers, welcher seine drei reinen Strategien mit den Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2 und p_3 möglichst optimal mischen möchte. Da sein Maximin–Wert in den reinen Strategien gleich 0 und sein Minimax–Wert gleich 1 ist, erscheint es durchaus sinnvoll die Gewinnerwartung durch gemischte Strategien zu maximieren. Für das zu besprechende Verfahren ist eine positive Gewinnerwartung zwingend vorgesehen. Um das sicher zu stellen, können wir beispielsweise 2 Einheiten zu den Einträgen der obigen Matrix addieren. Damit verschieben wir nur den "Nullpunkt" und ändern nichts an der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

	A	B
p_1	1	3
p_2	4	1
p_3	3	2

Nun wollen wir die Gewinnerwartung g für beide reinen Strategien A und B des Gegners sicherstellen und danach maximieren. Dies führt zu den beiden Ungleichungen:

$$1 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 \geq g$$
$$3 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 \geq g$$

Mit diesen Ungleichungen suchen wir die beiden Strategien des Gegners nach den maximalen Gewinnen ab. Da beide Ungleichungen erfüllt sein müssen, erhalten wir das Minimum dieser Maxima. Dieses Verfahren liefert also den Minimax–Wert. Da sich der erste Spieler diesen Wert durch die entsprechende Wahl von p_1, p_2 und p_3 auch sichern kann, handelt es sich gleichzeitig auch um den Maximin–Wert. Damit wäre der Minimax–Satz erfüllt.
Ein Maximieren der positiven Größe g ist aber einem Minimieren von $z = 1/g$ äquivalent. Jetzt verwenden wir einen kleinen Trick, welcher von *Albert W. Tucker* 1960 vorgestellt wurde: Da notwendigerweise

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

gilt, können wir die Zielfunktion z auch als

$$z = \frac{p_1}{g} + \frac{p_2}{g} + \frac{p_3}{g} = x_1 + x_2 + x_3$$

darstellen. Dividieren wir noch die beiden Ungleichungen durch g, dann erhalten wir folgende Aufgabe der **linearen Optimierung**, welche wir mit dem sogenannten **Simplex–Verfahren** lösen wollen:

$$
\begin{gathered}
z = x_1 + x_2 + x_3 \quad \rightarrow \quad \text{Min.} \\
1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 1 \geq 0 \\
3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 1 \geq 0
\end{gathered}
$$

Aus den für die meisten Menschen unhandlichen Ungleichungen machen wir Gleichungen, indem wir die Schlupfvariablen u_1 und u_2 einführen.

$$
\begin{gathered}
z = x_1 + x_2 + x_3 \quad \rightarrow \quad \text{Min.} \\
u_1 = 1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 1 \\
u_2 = 3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 1
\end{gathered}
$$

In diesen Gleichungen sind alle Variablen nicht negativ. Diese Nicht–Negativität gestattet es uns, das Minimum der Zielfunktion in endlich vielen Schritten zu berechnen. Dabei orientieren wir uns stets an den betragsmäßig größten Koeffizienten.
Zuerst erkennen wir einmal, dass die Zielfunktion z nur durch eine Verkleinerung von x_1, x_2 oder x_3 minimiert werden kann. Denken wir uns eine gleichmäßige Reduktion dieser drei Variablen, dann wird zuerst einmal die Nicht–Negativität von u_1 durch x_2 verletzt, da es sich bei der Zahl 4 um den größten Koeffizienten handelt. Im ersten Schritt müssen wir also, durch Umformen der Gleichung, x_2 durch u_1 ausdrücken und dies in die anderen Gleichungen einsetzen.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
4 \cdot z & = & 3 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_3 & + & u_1 & + & 1 \\
4 \cdot x_2 & = & -1 \cdot x_1 & - & 3 \cdot x_3 & + & u_1 & + & 1 \\
4 \cdot u_2 & = & 11 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_3 & + & u_1 & - & 3
\end{array}
$$

Hier haben wir alle Gleichungen mit dem relevanten Koeffizienten multipliziert, um uns Brüche zu ersparen. Das hat nicht nur schreibtechnische Gründe, sondern hilft auch Rundungsfehler, welche bei einem entsprechenden Computerprogramm auftreten, zu vermeiden. Für eine weitere Minimierung der Zielfunktion wäre, wegen des Koeffizienten 3, eine Verkleinerung der Variablen x_1 besonders effizient. Da dabei die Nicht–Negativität von u_2 gefährdet wäre, erfolgt im zweiten Schritt eine Auflösung der letzten Gleichung nach x_1. Einsetzen dieses Wertes in die anderen Gleichungen liefert:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
11 \cdot z & = & -1 \cdot x_3 & + & 2 \cdot u_1 & + & 3 \cdot u_2 & + & 5 \\
11 \cdot x_2 & = & -7 \cdot x_3 & + & 3 \cdot u_1 & - & 1 \cdot u_2 & + & 2 \\
11 \cdot x_1 & = & -5 \cdot x_3 & - & 1 \cdot u_1 & + & 4 \cdot u_2 & + & 3
\end{array}
$$

Diesmal kann eine effiziente Minimierung der Zielfunktion nur durch eine Vergrößerung von x_3 erfolgen. Die Nicht–Negativität von x_2 beschränkt aber diese Vergrößerung. Daher wird die zweite Gleichung nach x_3 aufgelöst und das Ergebnis in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
7 \cdot z & = & 1 \cdot x_2 & + & 1 \cdot u_1 & + & 2 \cdot u_2 & + & 3 \\
7 \cdot x_3 & = & -11 \cdot x_2 & + & 3 \cdot u_1 & - & 1 \cdot u_2 & + & 2 \\
7 \cdot x_1 & = & 5 \cdot x_2 & - & 2 \cdot u_1 & + & 3 \cdot u_2 & + & 1
\end{array}
$$

Jetzt sind wir schon beim letzten Schritt angelangt, da das Minimum der Zielfunktion offensichtlich durch $x_2 = u_1 = u_2 = 0$ erreicht wird und dabei keine Variable negativ ist. Damit erhalten wir die optimalen Werte:

$$z = \frac{3}{7} \qquad x_1 = \frac{1}{7} \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = \frac{2}{7}$$

Den eigentlich gesuchten, optimalen Strategiemix berechnen wir gemäß $x_i = z \cdot p_i$ zu:

$$p_1 = \frac{1}{3} \qquad p_2 = 0 \qquad p_3 = \frac{2}{3}$$

Die Gewinnerwartung des ursprünglichen Spiels ergibt sich aus der Größe $g = 7/3$, von der wir noch den am Anfang dazugegebenen Wert 2 abziehen müssen, zu $1/3$. Hier erkennen wir wiederum, dass diese Gewinnerwartung zwischen dem Maximin– und Minimax–Wert der reinen Strategien liegt. Es würde also keinen Sinn machen gemischte Strategien zu verwenden, wenn schon in reinen Strategien die Gleichheit von Maximin– und Minimax–Wert gilt. Fassen wir also die Ergebnisse zu diesem Spiel zusammen:

- Der erste Spieler kann sich seinen Maximin–Wert von 0 immer sichern, indem er immer seine dritte Strategie spielt.
- Der optimale Wert $1/3$ ist ihm nur als Gewinnerwartung sicher, wenn er seine erste und dritte Strategie im Verhältnis 1 zu 2 mischt. Dazu sollte er die Entscheidung dem Zufall überlassen. In einer konkreten Partie kann es aber durchaus vorkommen, dass der erste Spieler einen Verlust erleidet.
- Alle größeren Gewinne kann sich der erste Spieler nicht sichern. Auch der Minimax–Wert in reinen Strategien ist für ihn aus eigener Kraft nicht erreichbar.
- Interessanterweise kommt die zweite Strategie, das wäre jene, welche den größten Gewinn verspricht, im optimalen Strategiemix gar nicht vor. Sie wäre nur etwas für Hasardeure, respektive für gute Psychologen.

Das **Gefangenendilemma** ist wohl das populärste Beispiel der Spieltheorie. Dabei geht es um zwei Untersuchungshäftlinge, welche einer Straftat beschuldigt werden. Der Staatsanwalt, dem es an Beweisen mangelt, bietet eine Kronzeugenregelung an. Wenn ein Gefangener gesteht, und der andere leugnet, dann geht der Geständige straffrei aus, wogegen der Leugner die Höchststrafe von 5 Jahren aufgebrummt bekommt. Gestehen beide, dann erhalten sie wegen mildernder Umstände jeweils 4 Jahre Gefängnis. Leugnen beide, dann kann sie der Richter nur wegen eines geringeren Delikts zu jeweils 2 Jahren verurteilen.
Der Nutzen entspricht dem negativen Strafausmaß, sodass wir für die beiden Strategien Leugnen (L) und Gestehen (G) die Matrix

	L	G
L	−2	−5
G	0	−4

für den ersten Gefangenen erhalten. Sofort erkennen wir, dass Gestehen eine dominante Strategie darstellt, und zwar für beide Häftlinge – dieses Spiel hat sich ja auch der Staatsanwalt ausgedacht. Allerdings, und darin liegt das Dilemma für beide Gefangenen, ist der Maximin–Wert gleich dem Minimax–Wert, nämlich 4 Jahre Zuchthaus. Nur in dem

Falle, dass beide miteinander kommunizieren können, und unter diesen widrigen Bedingungen das Spiel als ein “Miteinander” begreifen, wäre eine Kooperation im Strategiepaar Leugnen–Leugnen und damit eine Haftstrafe von “nur” zwei Jahren für beide möglich.
Im Lichte der **Kooperation** kommt das Gefangenendilemma viel häufiger vor. Denken wir uns zwei Geschäftspartner, welche eine lose Vereinbarung getroffen haben. Wenn sich beide an die Vereinbarung halten, also kooperieren, dann wird wohl für beide ein positiver Nutzen abfallen. Begeht der eine allerdings einen Verrat (V), indem er beispielsweise minderwertige Ware liefert, dann kann er sich, falls der andere noch immer auf Kooperation (K) eingestellt ist, einen noch größeren Nutzen versprechen. Wir müssen also nur die Matrixeinträge des Gefangendilemmas ins Positive verschieben, indem wir beispielsweise die Zahl 5 addieren, und erhalten so die Nutzen des ersten Spielers:

	K	V
K	3	0
V	5	1

Die Analyse dieses Spiels ist völlig analog zu jener des Gefangenendilemmas. — Für beide Spieler ist die dominante Strategie der Verrat. Allerdings lässt diese Interpretation des Gefangenendilemmas auch weitere Sichtweisen zu. Die meisten Menschen werden nämlich nicht allzu oft in den “Genuss” einer Kronzeugenregelung kommen, dagegen wird ein Geschäftsmann sehr häufig lose Vereinbarungen zur Erhöhung seines Nutzens eingehen wollen. Der große Unterschied ist also die Aussicht auf viele Wiederholungen des Spiels. Unter diesem Aspekt wollen wir daher das Spiel untersuchen:
Wählt der erste Spieler die Strategie Kooperation mit einer Wahrscheinlichkeit p und der andere mit der Wahrscheinlichkeit q, dann kann der erste Spieler mit der Gewinnerwartung

$$\begin{aligned}&3 \cdot p \cdot q + 0 \cdot p \cdot (1-q) + 5 \cdot (1-p) \cdot q + 1 \cdot (1-p) \cdot (1-q) = \\ &-(q+1) \cdot p + 4 \cdot q + 1\end{aligned}$$

rechnen. Dies ist allerdings eine Gewinnerwartung unter der Bedingung, dass überhaupt ein Spiel stattfindet. Nun können wir aber annehmen, dass die Bereitschaft der anderen Spieler für ein Spiel mit dem ersten Spieler mit dessen Bereitschaft für Kooperation wächst. – Auch die Verräter wollen nicht gerne “übers Ohr gehauen” werden. Wenn wir also annehmen, dass ein Spiel mit dem ersten Spieler nur mit der Wahrscheinlichkeit p zustande kommt, dann ist dies äquivalent mit der Situation, dass der zweite Spieler eine dritte Strategie, nämlich nicht zu spielen (N) hat. Wählt der zweite Spieler nun diese Strategie mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$, dann ergibt sich folgende Normalform:

	K	V	N	
K	3	0	0	p
V	5	1	0	$1-p$
	$p \cdot q$	$p - p \cdot q$	$1-p$	

Hier haben wir auch die Wahrscheinlichkeiten angegeben, mit denen in diesem Modell die einzelnen Strategien gespielt werden. Demnach ergibt sich für die Gewinnerwartung G des ersten Spielers folgender Ausdruck:

$$G = -(q+1) \cdot p^2 + (4 \cdot q + 1) \cdot p$$

Fassen wir G als Funktion von p auf, dann erhalten wir als Schaubild stets eine Parabel, deren Scheitelpunkt ein Maximum darstellt. Dieser Scheitelpunkt liegt für $q = 0$ bei $p = 1/2$ und wandert weiter bis er für $q = 1/2$ bei $p = 1$ zu liegen kommt, dabei steigt die Gewinnerwartung von $1/4$ auf $3/2$ an. Für $q \geq 1/2$ sollte der erste Spieler stets kooperieren ($p = 1$) um seine Gewinnerwartung zu maximieren. In diesem Spiel ergibt sich daher, und zwar nur als Folge der Gewinnmaximierung des ersten Spielers, ein Trend weg vom Verrat und hin zur Kooperation. Da alle Spieler in die Rolle des ersten Spielers schlüpfen können, wird sich in diesem Modell die Kooperation als dominantes Verhalten durchsetzen, obwohl der Verrat, wie die Matrix lehrt, nicht durch einen Verlust bestraft wird.

In einem weiteren berühmten Beispiel der Spieltheorie, dem sogenannten **Chicken–Game**, geht es darum einem Konflikt auszuweichen oder ihn eskalieren zu lassen. Dieses Spiel wurde tatsächlich von amerikanischen Jugendlichen vor dem Vietnamkrieg gespielt. Dabei rasen zwei Autofahrer aufeinander zu. Wer zuerst ausweicht ist der Feigling – chicken. Allerdings kann dieses Spiel für beide katastrophale Folgen haben. Um nicht als blutrünstig zu gelten, werden wir nur mögliche Reparaturkosten ins Kalkül ziehen. Denken wir uns also die Nutzenmatrix des ersten Spielers folgendermaßen gegeben:

	A	E
A	1	0
E	2	-4

Wenn beide Spieler ausweichen (A), dann führt das zu einem geringen Nutzen durch das Ansehen, welches sie bei ihren Kollegen gewinnen, indem sie sich dem Spiel unterworfen haben. Wählen beide die Eskalation (E), dann kommt es mit Sicherheit zu einem Crash und den notwendigen Reparaturkosten. Ist der eine Spieler auf Eskalation und der andere auf Ausweichen eingestellt, dann geht der erste mit einem Nutzen von 2 Einheiten als Sieger vom Platz, wogegen der zweite nichts gewonnen, aber auch nichts verloren hat.
Der einzige gravierende Unterschied zum Gefangenen–Dilemma liegt darin begründet, dass es keine dominante Strategie gibt. Auch ist der Maximin– gleich dem Minimax–Wert, nämlich 0, sodass eine Maximierung des Mindestgewinns mit Hilfe von gemischten Strategien keinen Sinn macht. Trotzdem kann der erste Spieler mit einer höheren Gewinnerwartung spekulieren. Denn auch ohne Kenntnis der Gewinnmatrix des zweiten Spielers, weiß er nämlich, dass es sich um ein Chicken–Game handelt, sodass er den Maximin–Wert des zweiten Spielers in dessen Gewinnmatrix lokalisieren kann. So wie der Maximin–Wert des ersten Spielers im Strategiepaar (A,E) liegt, befindet sich der Maximin–Wert des zweiten Spielers im Paar (E,A). Für beide Strategiepaare gilt nun, dass der erste Spieler mit seiner Strategiewahl zufrieden ist, da er sich durch einseitiges Abweichen nicht verbessern kann. Diese Tatsache gilt aber auch für den zweiten Spieler, da es sich um ein Chicken–Game handelt.
Ganz allgemein wird eine Spielsituation, bei der keiner der Spieler durch alleiniges Ändern seiner Strategie seinen Gewinn vergrößern kann, **Nash–Gleichgewicht** genannt. Solchen Nash–Gleichgewichten in reinen Stratgien können wir eine gewisse Stabilität unterstellen, da alle Spieler mit ihrer Strategiewahl zufrieden sind. Darüber hinaus hat *John Nash* im Jahre 1950 gezeigt, dass in Spielen mit endlich vielen Strategien jeder Spieler eine gemischte Strategie besitzt, welche zusammen ein Gleichgewicht bilden. Für diese Leistung wurde er viele Jahre später mit dem Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften ausgezeichnet.
Dieser Satz von Nash hat den Vorteil, dass er auch für Spiele mit mehr als zwei Mitspielern gilt. Allerdings gibt es kein allgemeines Verfahren, welches die Berechnung der Gleichge-

wichte gestattet. Außerdem kann es, wie wir gesehen haben, mehrere Gleichgewichte mit unterschiedlichen Gewinnen beziehungsweise Gewinnerwartungen geben. Damit stellt sich aber die Frage der Stabilität erneut.
Als Spezialfall können wir den Minimax–Satz für Zwei–Personen–Nullsummen–Spiele angeben. In diesem Fall ist nämlich der Maximin–Wert des einen Spielers bis auf das Vorzeichen gleich dem Minimax–Wert des anderen, sodass die, schon zuvor als optimal bezeichneten, gemischten Strategien ein Gleichgewicht bilden.
Dieser Spezialfall gibt uns einen Hinweis, wie wir ein Nash–Gleichgewicht in gemischten Strategien für unser Chicken–Game ermitteln können. Angenommen, die Strategie Ausweichen wird vom ersten Spieler mit der Wahrscheinlichkeit p und vom zweiten mit der Wahrscheinlichkeit q gewählt, dann erhalten wir für die Gewinnerwartung des ersten Spielers den Ausdruck:

$$\begin{aligned} G &= 1 \cdot p \cdot q + 0 \cdot p \cdot (1-q) + 2 \cdot (1-p) \cdot q - 4 \cdot (1-p) \cdot (1-q) \\ &= (4 - 5 \cdot q) \cdot p + 6 \cdot q - 4 \end{aligned}$$

Wenn also der zweite Spieler $q = 4/5$ wählt, dann müsste sich der erste Spieler mit einer Gewinnerwartung von 4/5 zufrieden geben, ganz egal mit welchen Wahrscheinlichkeiten er seine Strategien spielt. Würden wir jetzt noch die Gewinnmatrix des zweiten Spielers kennen, dann könnten wir mit analogen Betrachtungen die Wahrscheinlichkeit p und damit ein Nash–Gleichgewicht in gemischten Strategien angeben. Dies ist allerdings gar nicht notwendig, da kooperatives Verhalten der Spieler, beispielsweise indem sie die Strategiepaare (A,E) und (E,A) abwechselnd spielen, die Gewinnerwartung des ersten Spielers auf +1 steigern würde. Aus der zuletzt genannten Tatsache folgern wir, dass die Bedeutung des Nash–Gleichgewichtes vor allem in der nicht–kooperativen Spieltheorie liegt.
Es muss aber nicht immer kooperatives Verhalten sein, welches zu einer Gewinnerwartung von +1 führt: Trauen sich nämlich die Spieler keine psychologische Einschätzung ihrer Gegner zu, dann werden beide die Sicherheitsvariante, also jene Strategie in der ihr Maximin–Wert liegt, wählen. Beide Spieler sind demnach gut beraten stets auszuweichen, sodass der erste Spieler mit einem Nutzen von +1 rechnen kann. Das entsprechende Strategiepaar (A,A) ist aber im Sinne von Nash, also im Lichte der Zufriedenheit, nicht stabil. Diese Instabilität kann nun weitreichende Konsequenzen für die Stabilität der Nash–Gleichgewichte haben: Denken wir uns das Strategiepaar (A,A) schon häufig gespielt. Dann ist es recht wahrscheinlich, dass einer der beiden Spieler, sagen wir der zweite, die Situation durchschaut und vom Ausweichen zur Eskalation wechselt. Damit wäre das Strategiepaar (A,E) und damit ein Nash–Gleichgewicht gegeben, mit der Konsequenz, dass der Nutzen für den ersten Spieler auf ±0 sinkt. Schwerlich wäre jetzt zu argumentieren, dass dieses Strategiepaar auf Grund der *Zufriedenheit* aller Spieler Stabilität besitzt.

Literatur

Neben den Standardwerken wären besonders folgende Bücher zu empfehlen:

Jörg Bewersdorff, *Glück, Logik und Bluff*, Vieweg 2003
Karl Sigmund, *Spielpläne*, Knaur 1997