Zur Messung des Luftwiderstandes im Physikunterricht

Johannes Barton, Wien 2011

Immer wieder ist man als Physiklehrer mit dem Thema konfrontiert, dass unterschiedliche Körper unterschiedlich schnell fallen. Gewissenhaft begründet man den Schülern diesen Sachverhalt mit einer Reibungskraft

$$F = \frac{c_w}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \ ,$$

in der ρ die Dichte der Luft, A die Querschnittsfläche senkrecht zur Bewegungsrichtung und v die Geschwindigkeit des Körpers angibt. Üblicherweise beendet man seine Ausführungen mit der Feststellung, dass der Widerstandsbeiwert c_w experimentell bestimmt werden muss.

Experiment

Miss alles, was sich messen lässt, und mach alles messbar, was sich nicht messen lässt. Dieses Zitat wird Galileo Galilei, einem Physiker der sich viel mit dem Fallen von Körpern beschäftigt hat, zugeschrieben. Auch wir sollten im Physikunterricht diese Maxime beherzigen, zumal uns wesentlich genauere Zeitmessungen als Galilei möglich sind.

Um den Einfluss des Luftwiderstandes auf die Fallzeit zu demonstrieren, werden wir unterschiedliche Körper, beispielsweise eine Stahlkugel und einen Tischtennisball, aus vorgegebener Höhe fallen lassen. Die Fallzeit kann mit einer elektronischen Stoppuhr auf Millisekunden genau gemessen werden, wenn die Zeitmessung mit einem Gabellichtschranken gestartet und durch ein Mikrofon mit angeschlossenem Verstärker, welches sich nahe der vermutlichen Auftreffstelle des fallenden Körpers am Boden befindet, gestoppt wird.

Der größte Fehler, der bei Versuchen zu den Fallgesetzen gemacht werden kann, liegt allerdings nicht in den Messgenauigkeiten der Fallhöhe und Fallzeit, sondern in der Vernachlässigung einer möglichen Anfangsgeschwindigkeit. Um den Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit auf die Messresultate zu reduzieren, bieten sich relativ große Fallhöhen an. Allerdings ist man dabei in geschlossenen Räumen auf etwa drei Meter beschränkt.

Weitaus wichtiger für die Genauigkeit der Messung ist aber folgende Überlegung: Umso kleiner die Anfangsgeschwindigkeit ist, desto größer wird die Fallzeit sein. Wir geben uns also eine fixe Fallhöhe durch den Abstand zwischen Lichtschranken und Boden vor, und wiederholen den Fallversuch so lange, bis wir das Gefühl haben, dass wir die Fallzeit nicht weiter steigern können. Das so erhaltene Maximum der gemessenen Fallzeiten können wir nun als jene Fallzeit interpretieren, welche dem Fallen des Probekörpers ohne Anfangsgeschwindigkeit gleichkommt. Es sei also davor gewarnt, eine Genauigkeitssteigerung durch Mittelwertbildung erzielen zu wollen.

Mit dem beschriebenen Messverfahren wurden bei einer Fallhöhe $h = 2.575\,\mathrm{m} \pm 5\,\mathrm{mm}$ die Fallzeit einer Stahlkugel zu $t = 0.728\,\mathrm{s} \pm 1\,\mathrm{ms}$ und die Fallzeit eines Tischtennisballes zu $t = 0.770\,\mathrm{s} \pm 1\,\mathrm{ms}$ gemessen. Dieser deutliche Unterschied in den Fallzeiten kann sicherlich nicht durch Messfehler erklärt werden.

Nehmen wir für die Stahlkugel ein reibungsfreies Fallen an, dann erhalten wir gemäß

$$g = \frac{2 \cdot h}{t^2}$$

für die Fallbeschleunigung einen Wert von $9.72\,\mathrm{m/s^2}$ in guter Übereinstimmung mit dem wohlbekannten Literaturwert von $9.81\,\mathrm{m/s^2}$. Diese geringe Diskrepanz von einem Prozent

kann nicht auf eine mögliche Anfangsgeschwindigkeit zurückgeführt werden, da diese den ermittelten Wert der Fallbeschleunigung vergrößert hätte. Damit scheint das vorgestellte Verfahren tatsächlich für Fallversuche ohne Anfangsgeschwindigkeit gut geeignet.
Wir wenden uns jetzt dem Reibungseinfluss beim Fallen des Tischtennisballes und der Frage, ob wir den Widerstandsbeiwert mit einer ausreichenden Genauigkeit bestimmen können, zu.

Auswertung

Ein Tischtennisball sollte, zumindest wenn er für Turniere zugelassen ist, eine Masse $m = 2.7\,\mathrm{g} \pm 0.3\,\mathrm{g}$ und einen Durchmesser von $40\,\mathrm{mm} \pm 0.5\,\mathrm{mm}$ haben. Auch mit einer wirklich guten Waage werden wir die Masse nicht merklich genauer bestimmen können. Wir sehen, dass die Ungenauigkeit in der Massenangabe die Fehlergrenzen des Endresultats bestimmen wird. Allerdings können wir mit diesen Daten einen sehr kleinen Teil des langsameren Fallens mit dem Auftrieb des Tischtennisballes erklären: Bei einer Luftdichte $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$, welche bei 20°C vorherrschen sollte, reduziert der Auftrieb des Tischtennisballes die Fallbeschleunigung $9.81\,\mathrm{m/s^2}$ auf den effektiven Wert $g = 9.66\,\mathrm{m/s^2}$.
Jetzt können wir die Bewegungsgleichung, welche die anfangs erwähnte Reibungskraft berücksichtigt, bei verschwindender Anfangsgeschwindigkeit als

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - k \cdot v^2$$

mit der Abkürzung

$$k = \frac{c_w \cdot \rho \cdot A}{2 \cdot m}$$

anschreiben. Es macht nun in der Schule wenig Sinn die exakte Lösung dieser Gleichung ableiten zu wollen, zumal am Ende doch eine nummerische, also näherungsweise Behandlung ansteht. Auch sollen die nachfolgenden Ausführungen dem Schüler den sinnvollen Umgang mit Polynomen illustrieren.
In erster Näherung gehen wir von dem Gedanken aus, dass der Reibungseinfluss für kleine Fallzeiten relativ klein ist, sodass wir keinen allzu großen Fehler machen, wenn wir die tatsächliche Geschwindigkeit v im Reibungsterm durch die Geschwindigkeit $g \cdot t$, welche sich ohne Reibung ergeben würde, ersetzen:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \approx g - k \cdot (g \cdot t)^2$$

Diese Gleichung können wir durch einfache Integration lösen, wobei die Integrationskonstante wegen der Anfangsbedingung verschwindet.

$$v \approx \int \left(g - g^2 \cdot k \cdot t^2\right) \cdot \mathrm{d}t = g \cdot t - \frac{g^2 \cdot k \cdot t^3}{3}$$

Reicht diese Näherung für die zu erzielende Genauigkeit noch nicht aus, dann kann diese Lösung wiederum in den Reibungsterm der Bewegungsgleichung eingesetzt werden. So erhalten wir für die zweite Näherung:

$$v \approx g \cdot t - \frac{g^2 \cdot k \cdot t^3}{3} + \frac{2 \cdot g^3 \cdot k^2 \cdot t^5}{15} - \frac{g^4 \cdot k^3 \cdot t^7}{63}$$

Nun wird klar, wie wir beliebige Genauigkeiten erreichen können. Abermalige Integration nach der Zeit liefert für die Fallhöhe:

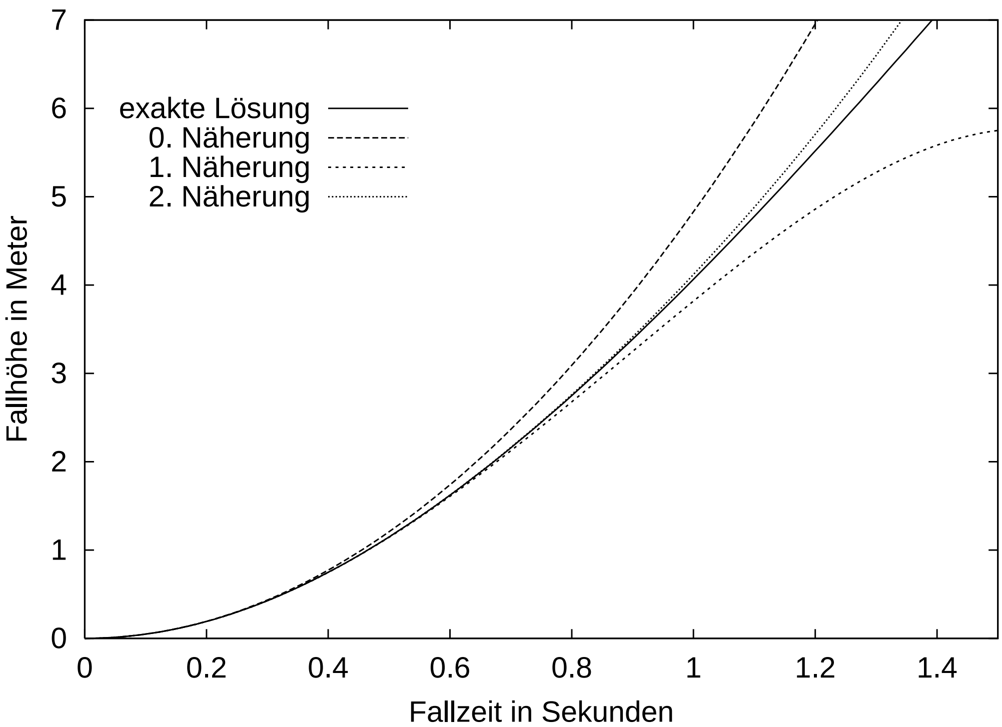
$$h = \frac{g \cdot t^2}{2} - \frac{g^2 \cdot k \cdot t^4}{12} + \frac{g^3 \cdot k^2 \cdot t^6}{45} - \frac{g^4 \cdot k^3 \cdot t^8}{504}$$

Der letzte angegebene Term stellt gewissermaßen einen Kompromiss zwischen der Taylorentwicklung der exakten Lösung und einem Polynom mit endlich vielen Summanden dar.

Setzen wir für h, t und g die angegebenen Werte ein, dann erhalten wir in erster Näherung $k = 0.1\,\mathrm{m}^{-1}$. Mit diesem Wert berechnen wir die Fallhöhe in der nächsten Näherung und erkennen, dass diese zweite Näherung für die Fehlergrenzen in der Fallhöhe von $\pm 5\,\mathrm{mm}$ notwendig, allerdings auch ausreichend ist. Jetzt können wir mit einem beliebigen Näherungsverfahren den Parameter k aus der zweiten Näherung zu $k = 0.13\,\mathrm{m}^{-1}$ berechnen und damit den Widerstandsbeiwert des Tischtennisballes zu

$$c_w = 0.47 \pm 10\%$$

bestimmen, wobei der relative Fehler durch die Ungenauigkeit in der Massenangabe zustande kommt. Dies ist ein überraschend gutes Ergebnis, da in der Literatur der Wert $c_w = 0.45$ für Kugeln bei kleinen Reynoldszahlen angegeben wird.



In der Grafik sind die exakte Lösung und die Näherungen der Fallhöhe als Funktion der Zeit mit den Parametern $k = 0.13\,\mathrm{m}^{-1}$ und $g = 9.66\,\mathrm{m/s}^2$ dargestellt. Die nullte Näherung gibt dabei das Fallen ohne Reibung an. Merkliche Unterschiede zur exakten Lösung sind erst ab einem Meter Fallhöhe auszumachen. Bis zu einer Fallhöhe von zwei Metern hätte für die Rechnung die erste Näherung vollkommen ausgereicht.

Anschrift des Verfassers: Dr. Johannes Barton, BG8, Jodok-Fink-Platz 2, 1080 Wien