Grundlagen der Finanzmathematik

Johannes Barton, Wien 2010

Um überhaupt Finanzmathematik betreiben zu können, bedarf es zweier Begriffe, welche wir an den Anfang dieses Artikels stellen wollen.
Jeder wirtschaftlichen Interaktion, sei es nun das Tauschen oder Verkaufen von Waren oder Dienstleistungen, liegt die Gleichwertigkeit von Leistung und Gegenleistung, das sogenannte **Äquivalenzprinzip**, zugrunde. Mit diesem Prinzip wird es erst möglich Gleichungen in der Finanzmathematik zu formulieren.
Ich gehe in ein Geschäft um mir einen neuen Flachbildschirm zu kaufen. Die Verkäuferin zeigt mir ein Modell um 199 Euro und erklärt mir, wie günstig dieses doch sei. Ob meines zweifelnden Blickes fügt sie rasch hinzu: "Wenn sie bar zahlen, kann ich ihnen 5% nachlassen." Da $199 \cdot (1 - 0.05) = 189.05$ gilt, einigen wir uns auf 189 Euro, welche ich sofort bezahle.
An diesem Beispiel erkennen wir, dass der Geldwert einer Ware erst durch den Verkauf fixiert wird. Das Äquivalenzprinzip ist also eine Notwendigkeit, um überhaupt einen Wert festzulegen und kein Resultat einer fairen Handlungsweise, was des öfteren unterstellt wird.
Dieses Beispiel zeigt aber auch einen weiteren Aspekt: Der Wert einer Zahlung ist vom Zeitpunkt der Zahlung abhängig. Das führt nun zwangsläufig zum zweiten wesentlichen Begriff der Finanzmathematik, nämlich zu den **Zinsen**. In der Finanzmathematik ist der Zins das Entgelt, welches für die Verleihung von Geld dem Verleiher zusteht. Daher ist es selbstverständlich, dass der Zins proportional zum entlehnten Kapital sein wird. Dies drückt der in Prozent angegebene **Zinssatz** aus, mit dessen Hilfe die Zinsen immer vom Anfangskapital berechnet werden. So hat man bei einem Zinssatz von 5% für 100 Euro 105 Euro gemäß der Multiplikation $100 \cdot (1 + 0.05) = 105$ zurückzuzahlen. Dem gegenüber werden Zinsen, die vom Endkapital berechnet werden, über den sogenannten **Diskontsatz** ermittelt. Die Verkäuferin des Flachbildschirms hat mir also einen Diskontsatz von 5% gewährt. Bezeichnen wir nun das Anfangskapital mit A, das Endkapital mit E, den Diskontsatz mit d und den Zinssatz mit i, dann gelten die beiden Formeln:

$$E = A \cdot (1 + i) \qquad \text{und} \qquad A = E \cdot (1 - d)$$

Um nun einen zum Diskontsatz äquivalenten Zinssatz zu bestimmen, müssen wir nur die eine Gleichung in die andere einsetzen und erhalten:

$$E = E \cdot (1 - d) \cdot (1 + i) \qquad \Longrightarrow \qquad i = \frac{1}{1 - d} - 1 = \frac{d}{1 - d}$$

Damit wird beispielsweise ein Diskontsatz von 20% einem Zinssatz von 25% gleichwertig. Da wir jeden Diskontsatz in einen äquivalenten Zinssatz umrechnen können, werden wir uns in den folgenden Erörterungen auf Zinssätze beschränken.
Natürlich ist das Verleihen von Geld an einen bestimmten Zeitraum gebunden, sodass nach *Eugen von Böhm-Bawerk* der Zins nicht den Preis des Geldes, sondern den Preis der Zeit darstellt. Die Zeitabstände, in denen die Verzinsung erfolgt, werden Zinsperioden genannt. Werden die Zinsen am Anfang einer Zinsperiode fällig gestellt, dann sprechen wir von antizipativer Verzinsung, einer Vorgangsweise, die der Diskontierung entspricht. Ist nichts näheres angegeben, dann bezieht sich ein Zinssatz immer auf die dekursive Verzinsung, also auf die Vorgangsweise, bei der die Zinsen am Ende einer Zinsperiode fällig gestellt werden.

Damit meint die Angabe $i = 10\%$ p.a. einen dekursiven Zinssatz mit einer Zinsperiode von einem Jahr. Bei einem Anfangskapital von 100 Euro wäre dies nach einem Jahr auf 110 und konsequenter Weise nach zwei Jahren auf 121 Euro angewachsen.

$$K_1 = K_0 \cdot (1 + i)$$
$$K_2 = K_1 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = K_0 \cdot (1 + i)^2 = K_0 \cdot (1 + 2 \cdot i) + K_0 \cdot i^2$$

Der erste Summand nach dem letzten Gleichheitszeichen stellt dabei die einfache Verzinsung dar – 10% in einem Jahr, daher 20% in zwei Jahren. Der zusätzliche zweite Summand gibt die Zinsen auf die Zinsen des ersten Jahres, den sogenannten **Zinseszins** an. Soll also das Äquivalenzprinzip für alle Verzinsungszeitpunkte seine Berechtigung haben, darf nicht mit einfacher Verzinsung gerechnet, sondern muss immer die Berechnung der Zinseszinsen berücksichtigt werden.
Wir werden als Abkürzung den Aufzinsungsfaktor $q = 1 + i$ verwenden, sodass sich das Endkapital K_n, das ist der Wert des Anfangskapitals K_0 nach n Zinsperioden, als

$$K_n = K_0 \cdot q^n \qquad \text{für} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

darstellen lässt. Die Umformung $K_0 = K_n \cdot (1/q)^n$ zeigt, dass der Ausdruck $1/q$ die sinnvolle Bezeichnung Abzinsungsfaktor verdient. Damit hätten wir wiederum das Diskontieren erklärt.
Mit den Begriffen des Auf- und Abzinsens können wir nun das Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik genauer fassen: Zahlungen dürfen nur dann verglichen oder addiert werden, wenn sie auf denselben Zeitpunkt auf- bzw. abgezinst werden. Wenn wir dies beherzigen, dann sind wir in der Lage effektive Zinssätze zu berechnen, welche wir untereinander vergleichen können. Ein Vergleich solcher Zinssätze kann als Entscheidungsgrundlage für ausstehende Investitionen oder mögliche Anlageformen dienen. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:
Eine Kreditschuld S von 10000 Euro soll durch zwei Raten $R_1 = 5000$ und $R_2 = 6000$ Euro getilgt werden. Dabei wird R_1 ein halbes Jahr und R_2 ein Jahr nach der Kreditaufnahme fällig gestellt. Als Zinsperiode bietet sich sinnvoller Weise ein halbes Jahr an. Wählen wir zunächst als Bezugszeitpunkt den Zeitpunkt der Kreditaufnahme, dann sollte für eine Gleichwertigkeit von Leistung und Gegenleistung die erste Rate einmal und die zweite Rate zweimal abgezinst werden. Folglich erhalten wir:

$$S = \frac{R_1}{q^1} + \frac{R_2}{q^2}$$

Eine Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit q^2 entspricht einer Verschiebung des Bezugszeitpunktes um zwei Zinsperioden, also jenem Zeitpunkt, für den wir die Schuld zweimal und die erste Rate einmal aufzinsen müssen. Offensichtlich ist das Äquivalenzprinzip für alle relevanten Zeitpunkte erfüllt.

$$S \cdot q^2 = R_1 \cdot q + R_2 \qquad \Longrightarrow \qquad S \cdot q^2 - R_1 \cdot q - R_2 = 0$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung lauten:

$$q = \frac{R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4 \cdot S \cdot R_2}}{2 \cdot S}$$

Da R_1, R_2 und S positiv sind, existieren zwei reelle Lösungen, wobei nur die positive sinnvoll ist. Bei Verwendung obiger Zahlenwerte erhalten wir den Aufzinsungsfaktor $q = 1.06394$ mit der angegebenen Genauigkeit, welcher sich, wie schon erwähnt, auf eine Zinsperiode von einem halben Jahr bezieht. Daher können wir den effektiven Zinssatz, dieser ist wie üblich dekursiv zu verstehen, als 6.4% p.s. anschreiben. Die für einen Vergleich zur Verfügung stehenden Zinssätze sind allerdings zumeist auf ein Jahr bezogen. Ist nun q der Aufzinsungsfaktor pro Semester, dann ist q^2 der Aufzinsungsfaktor pro Jahr. Mithin ist der effektive Zinssatz in diesem Beispiel als 13.2% p.a. anzugeben.

Wie wir an diesem Beispiel erkennen können, läuft die Ermittlung von Zinssätzen auf die Bestimmung der Nullstellen von Polynomen hinaus. Die Anzahl der Verzinsungszeitpunkte bestimmt dabei den Grad des Polynoms. Wollten wir die effektive Verzinsung bei einem Bausparvertrag, der in Österreich eine Laufzeit von sechs Jahren und eine Aufwertung durch staatliche Prämien hat, bestimmen, so müssten wir die Nullstellen eines Polynoms 6. Grades ermitteln. Dies gelingt nur näherungsweise und dann zumeist mit Hilfe eines Computers. Viel wichtiger als die vierte oder fünfte Dezimalstelle ist allerdings die Frage nach der Eindeutigkeit einer gefundenen Lösung. Wir wollen nochmals betonen, dass die Bestimmung von effektiven Zinssätzen, die in der Investitionsrechnung auch interne Zinssätze genannt werden, als Entscheidungsgrundlage für mögliche Investitionen oder Anlageformen dienen. Liefert beispielsweise eine Investitionsrechnung zwei oder mehr mögliche Zinssätze für ein und das selbe Investitionsobjekt, dann wird wohl die Entscheidung, ob in das Objekt investiert werden soll, eher erschwert als erleichtert. Zwei Tatsachen über reelle Polynomfunktionen können uns bei der Fragestellung nach den Nullstellen behilflich sein.

1. Polynome n-ten Grades haben maximal n Nullstellen.
2. Polynomfunktionen sind immer stetig. Sie können also durch einen Computer einfach gezeichnet und diese Grafiken gut interpretiert werden.

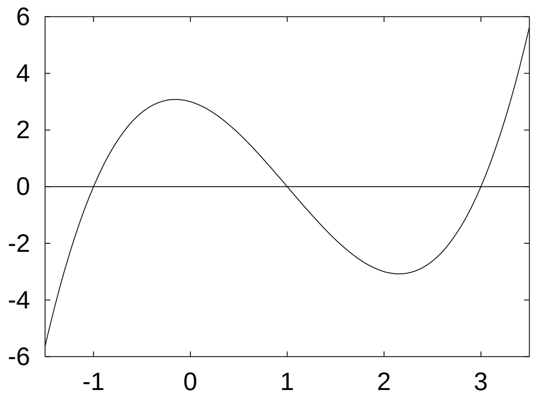
Um uns der Problematik der Mehrdeutigkeit bewusst zu werden, betrachten wir das folgende, konstruierte Beispiel:
Eine Chemiefabrik, welche in zwei Jahren laut Bescheid abgerissen werden muss, wird zu einem relativ günstigen Preis angeboten. Allerdings muss der Käufer nach der Nutzungsdauer das Betriebsgelände recht aufwendig sanieren lassen. Wir unterstellen jetzt, dass im ersten Jahr ein Gewinn vom dreifachen Kaufpreis, im zweiten Jahr ein Gewinn, der dem Kaufpreis entspricht und im dritten und letzten Jahr nur noch Sanierungskosten in der Höhe des dreifachen Kaufpreises anfallen werden. Will der potenzielle Käufer den internen Zinssatz feststellen, dann wird er bei Abzinsung der Kosten und Gewinne auf das Kaufdatum, die Gleichung

$$\text{Barwert der Kosten} = \text{Barwert der Gewinne}$$
$$1 + \frac{3}{q^3} = \frac{3}{q} + \frac{1}{q^2}$$

aufstellen, welche umgeformt zu

$$q^3 - 3 \cdot q^2 - q + 3 = 0$$

führt. Natürlich ist dem Käufer längst aufgefallen, dass bei einer statischen Betrachtungsweise, bei der also die unterschiedlichen Zeitpunkte vernachlässigt werden, die Einnahmen gleich den Ausgaben, nämlich jeweils der vierfache Kaufpreis, sind. Dies veranlasst ihn zu der Annahme, dass der interne Zinssatz möglicherweise 0% beträgt. In der Tat ist $q = 1$ eine Lösung obiger Gleichung, was leicht durch Einsetzen überprüft werden kann. Da jeder von uns, ganz ohne Investition, einen Zinssatz von 0% erzielen kann, wäre dem potenziellen Investor von dem Kauf der Chemiefabrik abzuraten. So leicht will sich aber der Verkäufer nicht geschlagen geben. Er führt ins Treffen, dass $q = 3$, und damit 200% p.a. als interner Zinssatz, ebenfalls eine Lösung der obigen Investitionsrechnung darstellt. Ein Vergleich mit den Zinssätzen des Kapitalmarktes, die in der Größenordnung von 10% p.a. liegen, zwingt förmlich jeden rechten Kapitalisten zu dieser Investition. Wir sehen, dass die **Methode des internen Zinssatzes** in diesem Fall keine Investitionsentscheidung zulässt. Der mögliche Käufer wird also mit den Zinssätzen des Kapitalmarktes die Barwerte der Kosten den Barwerten der Gewinne gegenüber stellen. Nehmen wir 10% p.a. als Kapitalmarktzinssatz an, dann erhalten wir 3.25 als Barwert der Kosten, welche verglichen mit 3.55 als Barwert der Gewinne eine Entscheidung zu Gunsten der Investition herbei führen. Einen vollständigen Überblick erhalten wir aber erst, wenn wir den Graf des Polynoms $q^3 - 3 \cdot q^2 - q + 3$ darstellen. Sind dabei die Polynomwerte für $q > 0$ negativ, dann überwiegen die Barwerte der Gewinne die Barwerte der Kosten.



Obwohl im letzten Beispiel eine Entscheidungsgrundlage mit Hilfe der Kapitalwertmethode möglich war, bleibt trotzdem ein gewisses Unbehagen. Stellen wir uns nämlich folgende Zahlungsvereinbarung zwischen Anton und Berta vor: Bei Vertragsabschluss bekommt Anton 1 Geldeinheit von Berta. Ein Jahr danach zahlt er 3 Einheiten zurück. Zwei Jahre nach Vertragsabschluss zahlt er nochmals 1 Einheit und bekommt schließlich im folgenden Jahr 3 Einheiten von Berta. Damit hätten wir dieselbe Situation wie bei der Chemiefabrik vorliegen, mit dem einzigen Unterschied, dass kein reales Investitionsobjekt vorhanden ist. Wie wir schon ausgeführt haben, bedingt der Vertragsabschluss das Äquivalenzprinzip, sodass die beiden schon ermittelten Zinssätze von 0 und 200 Prozent ihre Berechtigung haben. Da Anton bei diesem Geschäft die erste Zahlung erhält, wähnt er sich als "Kreditnehmer", für den 0 Prozent Kreditzinssatz ein wahres Schnäppchen darstellt. Auch Berta als "Kreditgeberin" kann mit 200% hoch zufrieden sein. Wir können uns jetzt gut vorstellen, dass viele Antons dieses Geschäft nachfragen und viele Bertas solch ein Geschäft anbieten werden. Da aber jeder freie Markt durch das Wechselspiel von Angebot und Nachfrage bestimmt wird, darf es nicht wundern, dass solche absolut sinnlosen "Pseudogeschäfte" überhand nehmen. Ob wir nun wieder einmal eine Kritik am Zinswesen angebracht oder das "Platzen von Finanzblasen" erklärt haben, bleibt dahingestellt.