

Zur Newton'schen Gravitation in der Speziellen Relativitätstheorie

Johannes Barton, Wien 2021

Häufig beginnt eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) mit einer Kombination aus Äquivalenzprinzip und klassischer (nichtrelativistischer) Mechanik, obwohl die ART auf der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) aufbaut. Im Gegensatz dazu soll der vorliegende Artikel für interessierte Schüler klären, wie weit sich die Newton'sche Gravitationstheorie in die SRT einbauen lässt.

Als Ausgangspunkt dient die Gravitationskraft

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

mit der sich zwei Massen M und m im Abstand r anziehen. Die Gravitationskonstante G und die Lichtgeschwindigkeit c sind die einzigen Naturkonstanten die im Folgenden Verwendung finden werden. Weiters werden wir einen Beobachter der sich außerhalb des Gravitationsfeldes, also in unendlicher Entfernung ruhend befindet, voraussetzen.

Größen die sich auf diesen Beobachter beziehen, werden mit dem Index "∞" kenntlich gemacht.

Als erstes Beispiel, bei dem Erkenntnisse der SRT zwingend notwendig sind, soll die *Rotverschiebung im Gravitationsfeld* betrachtet werden. Gemäß der berühmten Beziehung

$$E = m \cdot c^2$$

müssen Photonen der Energie $E = hf$ Masse besitzen. Wie wir sehen werden, wird das Planck'sche Wirkungsquantum h , welches hier den Proportionalitätsfaktor zwischen der Energie E und der Frequenz f des Lichtes angibt, in den Endformeln nicht mehr auftreten. Allgemein kann die (differentielle) Energieänderung im Gravitationsfeld als

$$dE = -\frac{GMm}{r^2} \cdot dr$$

angeschrieben werden. Demnach gilt für die Frequenzänderung:

$$df = -\frac{GMf}{c^2 r^2} \cdot dr$$

Trennung der Variablen und Integration zwischen den beiden Radialabständen r_1 und r_2 liefert das Frequenzverhältnis:

$$\frac{f_2}{f_1} = \exp\left(\frac{GM}{c^2 r_2} - \frac{GM}{c^2 r_1}\right)$$

Für $r_2 \rightarrow \infty$ erhält man

$$f_\infty = f \cdot \exp\left(-\frac{GM}{c^2 r}\right)$$

unter Fortlassung des Index 1. Wenn von einem Stern der Masse M und dem Radius r Licht der Frequenz f ausgeht, dann wird dieses in sehr großer Entfernung (zum Beispiel hier auf der Erde) mit der Frequenz f_∞ wahrgenommen.

Hinweise auf die Begriffe *Schwarzes Loch* oder *Ereignishorizont* lassen sich in dieser Formel jedoch nicht finden. Deutet man Frequenzen als reziproke Zeiten, dann wird ersichtlich, dass Uhren, die sich näher bei schweren Massen befinden, langsamer gehen, als Uhren in größerer Entfernung.

$$\Delta t = \Delta t_\infty \cdot \exp\left(-\frac{GM}{c^2 r}\right)$$

Es soll betont werden, dass in diesem Beispiel nur die Äquivalenz von träger und schwerer Masse Verwendung findet. Will man diese Aussage über den Gang von Uhren mit der Zeitdilatation der SRT in Beziehung setzen, dann benötigt man allerdings das Äquivalenzprinzip in seiner erweiterten Form, dass nämlich die Wirkung von Gravitationsfeldern äquivalent zu einer Beschleunigung der Bezugssysteme ist.

Um die Zeitdilatation der SRT mit dem Äquivalenzprinzip in Beziehung zu setzen, betrachten wir als nächstes Beispiel die *Fluchtgeschwindigkeit*. Diese ermitteln wir wiederum mit der differentiellen Form des Energiesatzes:

$$-\frac{GMm}{r^2} \cdot dr = dE = \frac{dE}{dv} \cdot dv$$

Mit

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dE}{dv} = \frac{mv}{1 - v^2/c^2}$$

folgt:

$$-\int \frac{GM}{r^2} \cdot dr = \int \frac{v}{1 - v^2/c^2} \cdot dv + K$$

Die Integration ist elementar durchführbar. Wählen wir die Integrationskonstante K so, dass für $r \rightarrow \infty$ die Geschwindigkeit verschwindet, erhalten wir die Fluchtgeschwindigkeit zu:

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2GM}{c^2 r}\right)}$$

Wie es in der SRT sein soll, bleibt die Fluchtgeschwindigkeit für alle positiven Radien eine positive reelle Größe, die durch die Lichtgeschwindigkeit beschränkt ist. Deuten wir diese Geschwindigkeit als die Geschwindigkeit eines im Gravitationsfeld frei fallenden Labors, dann kann gemäß dem Äquivalenzprinzip die Zeitdilatation der SRT auf den Gang von Uhren im Gravitationsfeld übertragen werden:

$$\Delta t = \Delta t_\infty \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \Delta t_\infty \cdot \exp\left(-\frac{GM}{c^2 r}\right)$$

Dies ist aber die gleiche Relation wie jene, die wir aus der Rotverschiebung abgeleitet haben. Ist der Betrag des Argumentes der Exponentialfunktion klein, dann kann in guter Näherung die Taylorreihenentwicklung der Exponentialfunktion nach dem linearen Glied abgebrochen werden, sodass die Newton'sche Näherung folgt:

$$\Delta t \approx \Delta t_\infty \cdot \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)$$

Diese Näherung wird zumeist in Lehrbüchern angegeben.

Außer der Zeitdilatation hat die SRT auch die Längenkontraktion zu bieten. Diese Kontraktion von Maßstäben ist aber nicht so einfach auf Maßstäbe im Gravitationsfeld übertragbar, da sie nur in Richtung der Bewegung auftritt.

Am Anfang praktisch aller Darstellungen des Äquivalenzprinzips wird ein frei um die Erde kreisender Satellit als Paradebeispiel angeführt, danach jedoch nur mehr stiefmütterlich behandelt. Wenden wir uns dieser Thematik zu: Bei einer exakten Kreisbahn stehen Momentangeschwindigkeit und Beschleunigung stets normal aufeinander, sodass auch in der SRT die Zentripetalkraft als

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

angeschrieben werden kann. Mithin gilt

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad ,$$

falls das Ruhesystem des Zentralkörpers der Masse M ein Inertialsystem darstellt. Mit wachsender Geschwindigkeit v des kreisenden Körpers steigt aber auch dessen Masse m an, sodass gemäß dem Wechselwirkungsgesetz der Zentralkörper merklich beschleunigt wird. Obige Gleichung kann demnach nur für kleine Geschwindigkeiten gelten. Sind diese Bedingungen zumindest näherungsweise erfüllt, dann erhalten wir ein anderes Ergebnis als bei dem Beispiel zur Fluchtgeschwindigkeit:

$$\Delta t = \Delta t_\infty \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \Delta t_\infty \cdot \sqrt{1 - \frac{GM}{c^2 r}}$$

Dieser Unterschied kann nur auf die unterschiedlichen Bewegungsrichtungen (radial und transversal) in den Analogien zur Zeitdilatation zurückgeführt werden. Da wir aber mit der Rotverschiebung im Gravitationsfeld ein auch experimentell gut fundiertes Ergebnis haben, werden wir diesem Ergebnis den Vorzug geben. Ein weiterer Grund für diese Bevorzugung ist auch die Tatsache, dass bei der Behandlung der Rotverschiebung der Zentralkörper stets als ruhend betrachtet werden kann, sodass die Einschränkungen, die bei dem kreisenden Satelliten gelten, überflüssig werden.

In der SRT ist der Ausdruck für die Längenkontraktion formal ident mit jenem der Zeitdilatation.

$$\Delta l = \Delta l_\infty \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Wir übertragen nun diese Kontraktion gemäß dem Äquivalenzprinzip auf Maßstäbe im Gravitationsfeld. Dabei müssen wir offensichtlich zwischen radialen und transversalen Längen unterscheiden, wobei dieser Unterschied im Unendlichen verschwindet.

$$\Delta l_{\parallel} = \Delta l_\infty \cdot \exp\left(-\frac{GM}{c^2 r}\right) \quad \text{und} \quad \Delta l_{\perp} = \Delta l_\infty \cdot \sqrt{1 - \frac{GM}{c^2 r}}$$

Offensichtlich wird die Messung von Umfängen von Kreisen anders interpretiert als die Messung der Radien. Damit wird das Verhältnis aus Umfang zu Radius nicht mehr dem aus der euklidischen Geometrie bekannten Verhältnis 2π entsprechen. Wir sprechen von *gekrümmten Räumen*.

Spätestens mit dieser Argumentation verlassen wir den Rahmen der SRT, da diese keine gekrümmten Räume kennt. Die Newton'sche Gravitationskraft ist also nur mit dem schwachen Äquivalenzprinzip, nämlich mit der Gleichheit von träger und schwerer Masse vereinbar.

Ein Beispiel, bei dem gleichförmige Kreisbewegungen in der SRT ohne der oben genannten Schwierigkeiten behandelt werden können, wäre folgendes: Wir betrachten zwei gleichartige Körper der Ruhemasse m_0 , welche mit der Geschwindigkeit v im Abstand r um den gemeinsamen Schwerpunkt kreisen. Im Schwerpunktsystem, das als Inertialsystem betrachtet werden kann, ist der Abstand zwischen den beiden Körpern offensichtlich durch $2r$ gegeben. Mit

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

gilt die Beziehung:

$$\frac{Gm^2}{4r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{Gm_0}{4c^2r} = \frac{v^2}{c^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Ungleichung

$$\frac{Gm_0}{4c^2r} \leq \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{9} \approx 0.385$$

gilt. Diese legt den kleinsten Abstand zwischen den beiden Massen fest:

$$2r \geq \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{Gm_0}{c^2}$$

Wesentlich interessanter als dieses Stabilitätskriterium ist jedoch die Tatsache, dass obige Gleichung im allgemeinen Fall zwei verschiedene Geschwindigkeiten als Lösungen besitzt.

Will man als Lehrender Interesse an Fragen der ART wecken, dann wäre dieses Beispiel sicherlich ein guter Einstieg in die Thematik.