

Ein für die Schule optimiertes Experiment zur Periodenverdopplung

Johannes Barton, Wien 2008

Einleitung

Chaotische Systeme und Periodenverdopplung sind moderne Forschungsgebiete, welche auch im Mathematikunterricht immer häufiger angerissen werden. Leider sind die meisten Demonstrationsexperimente zur Periodenverdopplung zu komplex für den Physikunterricht und überschreiten auch bei weitem die Möglichkeiten einer typischen Geräteausstattung einer Schule. Ein sehr einfaches System, welches Periodenverdopplung zeigt, wurde von *Paul S. Linsay* untersucht.¹ Dabei handelt es sich um einen Serienschwingkreis, welcher bei 1.78MHz betrieben wird. Die Nichtlinearität dieses anharmonischen Oszillators ist durch eine Kapazitätsdiode gegeben. Linsay betont, dass bei einer Ersetzung der Kapazitätsdiode durch eine Parallelschaltung von Kondensator und Diode keine Periodenverdopplung beobachtet wurde. Damit geht aber ein wichtiger Demonstrationseffekt verloren, der darin besteht, dass durch Hinzufügen (und nicht durch Austausch) eines Elementes aus dem harmonischen Oszillator ein anharmonischer wird. Die vorliegende Arbeit soll zeigen, dass an einem Serienschwingkreis mit einer Parallelschaltung von Kondensator und *normaler* Diode ebenfalls Periodenverdopplung beobachtet werden kann. Dazu werden wir, im Gegensatz zu Linsay, direkt die Spannung am nichtlinearen Element, also der Diode, mit einem Oszilloskop messen.

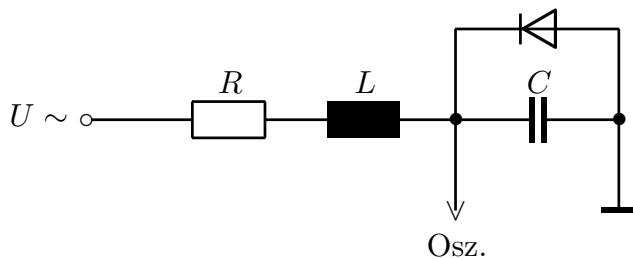


Abb. 1: Ersatzschaltbild

In obiger Schaltskizze wird der schwingungsfähige Anteil durch die Induktivität L und die Kapazität C dargestellt. Wobei C auch die Eingangskapazität des Oszilloskops und die Kapazität der Diode beinhaltet. Der Widerstand R berücksichtigt nicht nur den Ohmschen Widerstand des Drahtes, sondern alle Wirkverluste. Wie Linsay werden wir die besten Effekte nahe der Resonanz erwarten, wobei wir die Resonanzfrequenz stark reduzieren müssen, da in Schulen meist nur Sinusgeneratoren bis 100kHz zur Verfügung stehen.

Experiment

In diesem Abschnitt wird eine konkrete Versuchsanordnung beschrieben. Bei den Abbildungen 2 bis 4 handelt es sich um Photographien von Oszilloskopbildschirmen.

Als Spannungsquelle dient der $1\text{k}\Omega$ -Ausgang eines Funktionsgenerators, welcher maximal $12V_{\text{ss}}$ liefert. Der Serienschwingkreis besteht aus einer Spule mit 1200 Windungen (35mH , 12Ω) und einem 100pF Kondensator. Ein Eingang eines 2-Kanal Elektronenstrahloszilloskops (Bezeichnung der Eingangsimpedanz: $25\text{pF}||1\text{M}\Omega$) misst die Gesamtspannung, der andere die Kondensatorspannung. Der Schwingkreis wird bei einer Frequenz von 50kHz sinusförmig betrieben. Durch Änderung der Spannung wird gezeigt, dass der Schwingkreis

¹ *Paul S. Linsay*, Phys. Rev. Lett. **47**, 1349 (1981)

linear arbeitet. Danach wird gemäß Abbildung 1 eine Diode 1N4007 parallel zum Kondensator geschaltet und die Erregerspannung schrittweise erhöht. Bis $3V_{ss}$ ist nur typisches Diodenverhalten erkennbar.

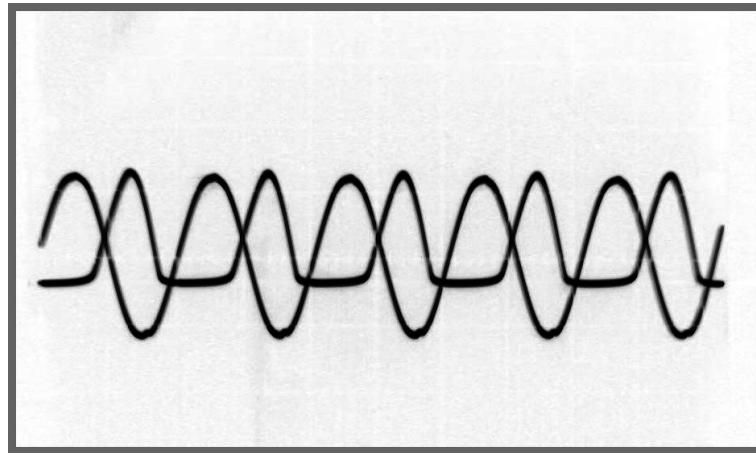


Abb. 2: typisches Diodenverhalten bei $2.4V_{ss}$

Im Durchlassbereich hält die Diode eine ziemlich konstante Spannung ($\approx -0.4V$) am Kondensator, sodass die “negativen Halbwellen” teilweise abgeschnitten werden. Das Schwingungsverhalten der Kapazität wird nur im Sperrbereich der Diode sichtbar, wobei dieser Sperrbereich dieselbe Periodizität wie die Erregerspannung aufweist. Weitere Erhöhung der Spannung führt zu einer Periodenverdopplung in dem Sinne, dass bei jeder zweiten Periode der Sperrbereich schwächer ausgeprägt ist. Bei etwa $5V_{ss}$ ist in jeder zweiten Periode der Sperrbereich gänzlich verschwunden. Dies legt die Bezeichnung *optimale Periodenverdopplung* nahe.

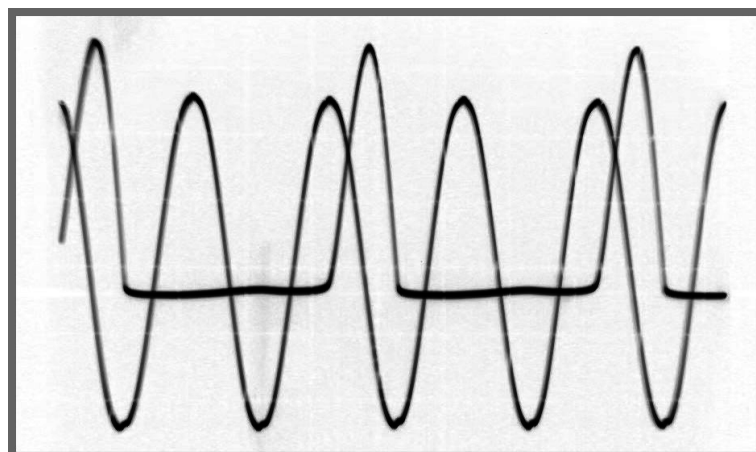


Abb. 3: optimale Periodenverdopplung bei $4.8V_{ss}$

Ab $9V_{ss}$ wird Periodenvervierfachung erkennbar. So etwas wie optimale Periodenvervierfachung konnte allerdings nicht festgestellt werden. Bei der maximalen Spannung des verwendeten Signalgenerators von $12V_{ss}$ konnte chaotisches Verhalten erahnt werden. Dies lässt sich aus verständlichen Gründen nicht durch ein Foto demonstrieren. Der gesamte Versuch ist nicht an die angegebene Frequenz gebunden. Vielmehr konnte mit dem angegebenen Aufbau optimale Periodenverdopplung zwischen $22kHz$ und $69kHz$ beobachtet werden.

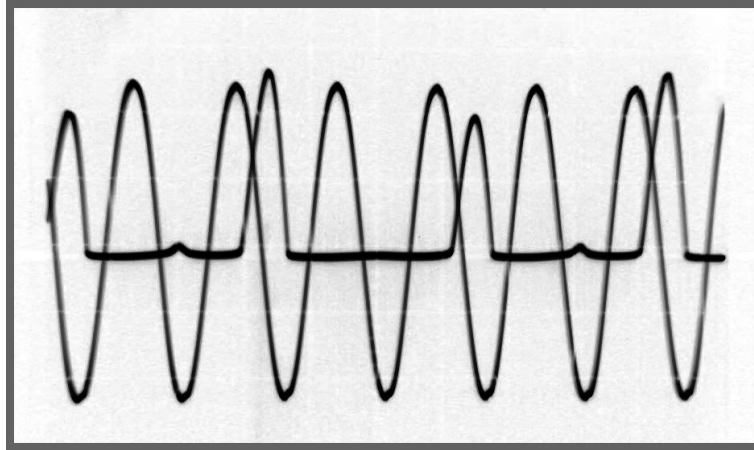


Abb. 4: Periodenvervierfachung bei $9.6V_{ss}$

Theorie

In diesem Abschnitt sollen ein einfaches Diodenmodell und eine entsprechende Computersimulation vorgestellt werden, welche das Experiment qualitativ richtig beschreiben.

Wie Abbildung 1 nahelegt, betrachten wir einen Serienschwingkreis, bei dem wir ausgehend von der Tatsache, dass in einem geschlossenen Kreis die Summe der Spannungen gleich null ist, für die Ladung q folgende Differentialgleichung erhalten.

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + V(q) = U_0 \sin(\omega t) \quad (1)$$

Dabei beschreibt die rechte Seite die angelegte sinusförmige Wechselspannung mit der Kreisfrequenz ω . Die Größe $V(q)$ stellt die Spannung an der Kapazität C dar, welche ebenfalls eine Funktion der Ladung ist. Im linearen Fall gilt der Zusammenhang $q = C \cdot V$, sodass L , R und C Parameter der linearisierten Theorie darstellen. Bei konkreten Messungen an seriellen Schwingkreisen stellt man sehr bald fest, dass diese Parameter modifiziert werden müssen, um dem Experiment zu entsprechen. So wird beispielsweise der Parameter R , der eigentlich nur den Ohmschen Widerstand angibt, so uminterpretiert, dass er alle Wirkverluste abdeckt, um die Dämpfung des Schwingkreises richtig zu beschreiben. Gehen wir nun zu einer nichtlinearen Differentialgleichung über, welche Periodenverdopplung oder Chaos hervorbringen kann, dann wird die Interpretation der auftretenden Parameter nochmals schwieriger. Wir kommen also nicht umhin, möglichst einfache Modelle mit möglichst wenigen Parametern zu verwenden. Diese noch verbleibenden Parameter müssen dann durch Vergleich der gefundenen Lösungen mit dem realen Experiment bestimmt werden. Obwohl solche Parameter aus einer linearen Theorie abgeleitet werden, kann ihr Zusammenhang mit den "linearisierten Parametern" maximal als Indiz gewertet werden. Ohne viel über Sperrschichtkapazitäten oder Bandwiderstände von Dioden zu wissen², können wir das Wesen einer Gleichrichterdiode recht einfach charakterisieren, da sie wie ein spannungsabhängiger Schalter wirkt, der erst ab einer bestimmten Knickspannung V_0 geschlossen ist. Für die Parallelschaltung der Diode mit dem Kondensator gilt daher, dass im Durchlassbereich der Kondensator praktisch kurzgeschlossen ist, sodass sich eine näherungsweise konstante Spannung $-V_0$ einstellt. Solange die Diode allerdings sperrt, gilt der lineare Zusammenhang $V = q/C$. In diesem Modell haben wir auch den Vorteil,

² vgl. bspw.: Taschenbuch Elektrotechnik, VEB Verlag Technik, Berlin (1986)

dass sich eine mögliche Sperrschichtkapazität in der Gesamtkapazität C inkludieren lässt. Wir werden also die Funktion $V(q)$ durch einen Knick in der Kennlinie idealisieren und schreiben:

$$V(q) = \max\left(\frac{q}{C}, -V_0\right) \quad (2)$$

Damit wird die Differentialgleichung (1) nichtlinear, sodass wir auf numerische Lösungen mittels Computer angewiesen sind. Dazu müssen alle Größen dimensionslos gemacht werden. Wir führen folgende reduzierte Größen ein:

$$x = \omega t \quad \text{und} \quad y = \frac{q}{CV_0} \quad \text{und} \quad u = \frac{U_0}{V_0} \quad (3)$$

Dies eingesetzt in (1) liefert:

$$a \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + b \cdot \frac{dy}{dx} + \max(y, -1) = u \cdot \sin(x) \quad (4)$$

$$\text{mit} \quad a = \omega^2 CL \quad \text{und} \quad b = \omega CR$$

Betreiben wir den Schwingkreis nahe der Resonanz, dann muss nach Thomson $a \approx 1$ gelten. Die Dämpfung des Schwingkreises wird durch den Parameter b angegeben. Dieser beinhaltet alle Wirkverluste und sollte relativ groß sein, wie speziell das Oszilloskopbild zur optimalen Periodenverdopplung suggeriert. Wir wollen nochmals betonen, dass wir zwar mit $a = \omega^2 CL$ und $b = \omega CR$ einen Zusammenhang zwischen den Parametern der nichtlinearen Theorie mit jenen der linearen hergestellt haben, dieser aber nur bei entsprechenden Uminterpretationen Gültigkeit haben kann.

Um Gleichung (4) numerisch auszuwerten, bietet sich ein, dem Störmer-Verfahren nachempfunder Algorithmus an, welcher hier kurz vorgestellt werden soll. Wir zerlegen die x -Achse in äquidistante Stützstellen mit den Abständen Δx . Aus den beiden bekannten Werten $y_0 = y(x - \Delta x)$ und $y_1 = y(x)$ soll der neue Wert $y_2 = y(x + \Delta x)$ berechnet werden. Wenn wir die Taylor-Entwicklung nach der zweiten Ordnung abbrechen, gilt:

$$y_2 = y_1 + y_1' \Delta x + \frac{1}{2} y_1'' \Delta x^2 \quad \text{und} \quad y_0 = y_1 - y_1' \Delta x + \frac{1}{2} y_1'' \Delta x^2$$

Durch Addition bzw. Subtraktion dieser Gleichungen erhalten wir Ausdrücke für die erste und zweite Ableitung, welche, in (4) eingesetzt, das Resultat

$$y_2 = \frac{2\Delta x^2}{2a + b\Delta x} \left(u \sin(x_1) - \max(y_1, -1) + \frac{2a}{\Delta x^2} y_1 + \frac{b\Delta x - 2a}{2\Delta x^2} y_0 \right)$$

liefern. Nach dieser Berechnung des neuen Wertes können die alten Werte überschrieben werden. Eine Wahl von $\Delta x = 0.01$ erscheint ausreichend, da dies mehr als 600 Stützstellen pro Periode des Eingangssignals entspricht. Nach einigen Perioden sollte dieser Algorithmus eingeschungen sein, sodass die Anfangswerte ($y_1 = 0$ und $y_0 = 0$ für $x = 0$) keine Rolle mehr spielen.

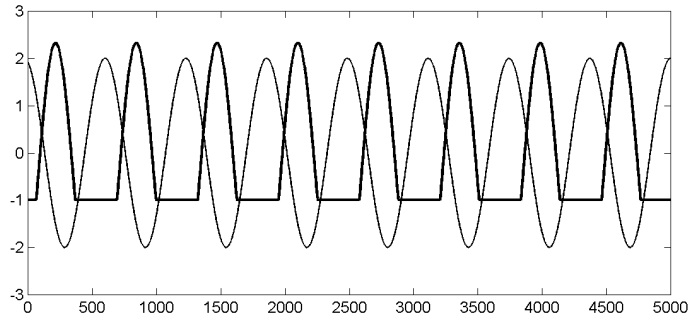


Abb. 5: typisches Diodenverhalten: $a = 1.0$ $b = 0.4$ $u = 2.0$

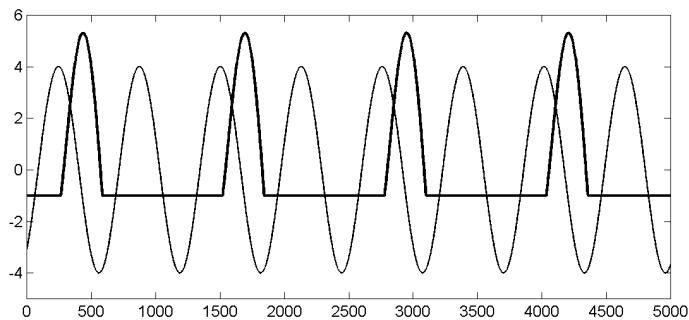


Abb. 6: optimale Periodenverdopplung: $a = 1.0$ $b = 0.4$ $u = 4.0$

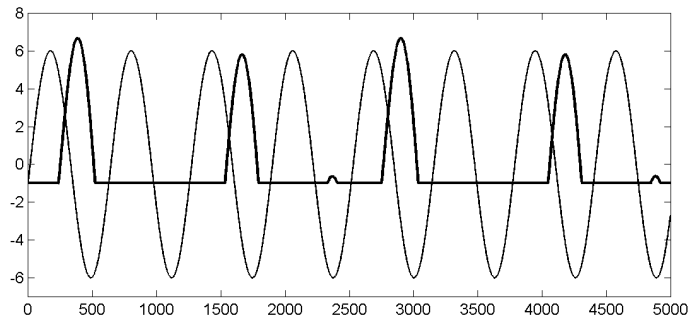


Abb. 7: Periodenvervierfachung: $a = 1.0$ $b = 0.4$ $u = 6.0$

Die Abbildungen 5 bis 7 zeigen die Ergebnisse einer Computersimulation. Dargestellt sind die reduzierten Spannungen als Funktion der Zeit. Dabei wurden die Modellparameter a , b und u so lange geändert, bis eine gute Übereinstimmung mit den realen Oszilloskopbildern erreicht werden konnte. Die Parameter $a = 1.0$ und $b = 0.4$ können sicherlich noch optimaler gewählt werden. Das wirklich Interessante an dem vorgestellten Modell ist, dass nur das Schaltverhalten der Diode, beschrieben durch die Maximumfunktion, benötigt wird.

Am Ende dieser Arbeit soll darauf hingewiesen werden, dass das vorgestellte Experiment in weiten Grenzen variiert werden kann. Details dazu finden sich in der Zeitschrift *Wissenschaftliche Nachrichten* Nr. 120, herausgegeben vom BMUK.